Soorten kennis en vaardigheden die relevant zijn voor reken-wiskunde taken

Dr. Marcel V. J. Veenman
Instituut voor Metacognitie Onderzoek (IMO)

Om adequaat te kunnen rekenen dient een leerling over een breed palet van kennis en vaardigheden te beschikken én deze kennis en vaardigheden ook daadwerkelijk kunnen toepassen (Gagné, Yekovich & Yekovich, 1993; Resnick & Ford, 1981). In dit hoofdstuk zullen verschillende soorten kennis en vaardigheden globaal worden besproken. Verder zal in grote lijnen worden aangegeven hoe en wat er in het rekenproces stokt indien bepaalde kennis of vaardigheden ontbreken, dan wel incorrect worden toegepast. Tot slot zullen enkele remediëringsmethodieken in algemene zin worden besproken. Bij de verschillende domeinen (G 1000 e.v.) wordt op deze zaken specifieker ingegaan.

De begrippen kennis en vaardigheden onderscheiden zich van elkaar door wat in het dagelijks leven met "weten" en "kunnen" wordt aangeduid. Iets "weten" betekent dat je bepaalde feitenkennis paraat hebt, bijvoorbeeld de kennis dat er 12 dozijn in een gros gaan. Kennis van begrippen, zoals wat een gros is, wordt in de psychologie ook wel conceptuele kennis genoemd. Feitenkennis kan echter ook betrekking hebben op gebeurtenissen: "Neil Armstrong betrad in 1969 als eerste mens de maan". We spreken dan van episodische kennis. Voor rekenen en wiskunde is met name conceptuele kennis relevant. Overigens hoeft die kennis niet per se correct te zijn. Iemand kan bijvoorbeeld denken dat het modaal inkomen hetzelfde is als het gemiddeld inkomen (en dat is *niet* correct). Ons geheugen bevat, naast correcte kennis, vele grote en kleine misvattingen. Pas wanneer wij kennis daadwerkelijk gaan gebruiken, kunnen eventuele misvattingen voor het voetlicht treden (en dan hopelijk worden gecorrigeerd).

Iets "kunnen" betekent dat je over een bepaalde vaardigheid beschikt. Een vaardigheid bestaat uit een serie geordende handelingen waarmee een specifiek doel kan worden bereikt, bijvoorbeeld het uitrekenen van de optelsom 26 + 85. Indien een leerling over de vaardigheid van optellen beschikt, dan ligt er in het geheugen een programma of voorschrift opgeslagen over welke handelingen wanneer moeten worden uitgevoerd. Zo'n programma noemen we een procedure (vandaar dat er ook wordt gesproken van procedurele kennis die in het geheugen opgeslagen ligt). Een procedure voor optellen zou als volgt kunnen verlopen:

1. Zet de getallen onder elkaar;
2. Zorg dat de beide getallen zo onder elkaar staan dat de eenheden en tientallen corresponderen;
3. Begin rechts en tel beide eenheden bij elkaar op;
4. Indien het totaal kleiner is dan 10, schrijf dan de uitkomst onder de beide eenheden;
5. Indien het totaal groter is dan 10, schrijf dan uitsluitend het meerdere van 10 onder de beide eenheden en onthoud het resterende tiental;
6. Schuif één positie naar links en tel beide tientallen bij elkaar op;
7. Indien er nog een resterend tiental bewaard werd uit stap 5, verhoog dan de uitkomst van stap 6 met 1;
8. Indien het totaal van stap 6 en 7 kleiner is dan 10, schrijf dan de uitkomst onder beide tientallen;
9. Indien het totaal van stap 6 en 7 groter is dan 10, schrijf dan het meerdere van 10 onder beide tientallen en onthoud een honderdtal;

10. Indien er nog een honderdtal bewaard werd schrijf dan een 1 links van het tiental in de uitkomst.

Veelal zijn delen van zo'n procedure geautomatiseerd (zie hieronder "geautomatiseerde basisvaardigheden") omdat de leerling bepaalde rekenhandelingen (bijvoorbeeld stap 1 t/m 5) reeds eerder heeft geoefend met meer eenvoudige optelsommen. Verder is bovengenoemde procedure niet de enige succesvolle methode volgens welke een opteltaak kan worden uitgevoerd. Volgens, bijvoorbeeld, de 1010-methode (Beishuizen, van Putten, & van Mulken, 1997) worden de tientallen van de eenheden gesplitst en apart opgeteld, waarna restgetallen worden verrekend. Wat dit procedurevoorbeeld aantoont is dat een vaardigheid doorgaans een complexe set van geordende handelingen betreft, waarin makkelijk een procedurefoutje kan sluipen. Indien slechts één deelhandeling incorrect verloopt of de volgorde van deelhandelingen wordt verwisseld, dan struikelt de leerling over deze opgave. Ook de mate van oefening in optelvaardigheid bepaalt in hoeverre de leerling meer complexe vraagstukken aankan, waarvan optellen slechts een onderdeel vormt. Onvoldoende automatisering van de benodigde deelvaardigheden resulteert in een overbelasting van het werkgeheugen (zie beneden). Tot slot moet bij meer complexe opgaven de optelvaardigheid, indien nodig, op het juiste moment worden ingezet. Sommige leerlingen passen bij complexe opgaven vrij impulsief een lang niet altijd adequate procedure toe op willekeurige getallen in de opgavetekst. Er is dan sprake van een slechte aansturing van het probleemoplosproces (zie beneden bij metacognitieve vaardigheden).

De strekking van dit hoofdstuk is dat een rekendeficiëntie niet per definitie een indicatie is voor een (intellectueel) onvermogen tot rekenvaardigheid. Rekendeficiënties kunnen voortkomen uit een groot scala aan tekorten in kennis en vaardigheden met betrekking tot het rekenproces. Dit hoofdstuk behandelt de benodigde soorten kennis en vaardigheden in algemene zin. De diagnostiek van rekenproblemen zou vervolgens gericht moeten zijn op het opsporen van specifieke hiaten in kennis en tekorten in vaardigheid bij problematische leerlingen. Dergelijke specifieke hiaten en tekorten komen aan bod bij de verschillende domeinen. Remedial teaching kan zich dan op het verhelpen van deze deficiënties richten.

Kennis

Algemene, conceptuele kennis. Bij algemene, conceptuele kennis gaat het om kennis van begrippen in de wereld om ons heen. Juist in de huidige rekenmethoden doen realistische, complexe problemen een groot beroep op deze algemene, conceptuele kennis. Voor het begrijpen van een redactiesom dien je, bijvoorbeeld, te weten wat "km/uur" betekent of wat "Ecu's" zijn (zie instaptoetsen G1103 en G2103). Vooral bij het lezen en begrijpen van een gegeven opgave speelt dergelijke kennis een rol. Wanneer de leerling essentiële begrippen uit de opgavetekst niet kent, dan blijkt het uitermate moeilijk voor de leerling te zijn om de opgave goed te begrijpen en een adequate mentale representatie van het probleem op te bouwen. Zo'n adequate probleemrepresentatie bestaat uit begrijpen wat de gegevens in de opgave zijn, wat het doel is dat bereikt moet worden (het gevraagde), en wat een plausibele procedure is om dat doel te bereiken. Wanneer essentiële begrippen in de opgavetekst onbekend zijn voor de leerling, dan verstoort dit onbegrip direct het oplossen van het probleem. Leerlingen geven dan aan dat zij niet weten wat een bepaald woord betekent en dat zij daarom de opgave "vanzelfsprekend" niet kunnen oplossen (cf. Veenman & van Dam, 1997). Dit snelle opgeven geeft aan hoe essentieel het begrijpen van concepten in de opgavetekst is voor leerlingen. Vooral allochtone leerlingen en leerlingen met een beperkte woordenschat (Van den Berg, van Eerde, & Klein, 1993; Verhoeven & Vermeer, 1992) kunnen hierbij problemen ondervinden. Het direct aanleren van een brede woordenschat heeft weinig zin, omdat in nieuwe opgaven telkens weer nieuwe begrippen worden gebruikt. In dit geval zou structurering (zie

G0060) door het vereenvoudigen of verduidelijken van de gebruikte termen oplossing kunnen bieden en het probleemoplosproces op gang kunnen helpen.

Ook tijdens het geven van een antwoord kan algemene, conceptuele kennis een rol spelen. In een onderzoek van Veenman en van Dam (1997) blijkt één leerling (11 jr.) tijdens het oplossen van een redactiesom met de vraag “hoeveel uur er die dag is gespeeld”, na een opeenstapeling van rekenfouten, te komen tot het antwoord van maar liefst 30 uur. Bovendien geeft de leerling geen krimp bij dit antwoord. Blijkbaar is de algemene kennis dat er slechts 24 uur in een dag gaan onvoldoende beschikbaar om de leerling van het geven van zo’n evident foutief antwoord te weerhouden. De instructie om het antwoord te evalueren of te controleren blijkt op deze leeftijd echter weinig soelaas te bieden (De Corte & Verschaffel, 1980; Veenman, 2015a). Leerlingen zijn opgetogen wanneer zij een antwoord bereiken en beschouwen de taak dan als beëindigd.

Domeinspecifieke kennis. Deze categorie van conceptuele kennis heeft betrekking op het weten en kennen van begrippen die specifiek van belang zijn in het domein van rekenen en wiskunde. Domeinspecifieke kennis heeft bijvoorbeeld betrekking op getalkennis (weten wat “7” betekent of een tiental), associaties met meer bekende getallen (bijvoorbeeld tafelgetallen, kleine getallen en “lievelingsgetallen”; Milikowski, 1995), kennis van het positiesysteem (weten dat de “1” in “14” iets anders betekent dan de “1” in “41”), kennis van operatoren (weten wat een deelteken is of wat het “=”-teken betekent; De Corte & Verschaffel, 1980), kennis van rekenregels (weten dat je niet door 0 mag delen of kennis van distributieve eigenschappen), etc. Bij aanvankelijk rekenen beperkt de invloed van domeinspecifieke kennis zich vooral tot getalkennis en kennis van het positiesysteem. Naarmate de leerling vordert in het reken- en wiskunde-onderwijs gaan meer complexe begrippen zoals distributie een rol spelen, waarbij de kans op uitval toeneemt. Het is evident dat een gebrek aan de *benodigde* domeinspecifieke kennis er veelal toe leidt dat het probleemoplosproces direct spaak loopt. Soms leidt incorrecte domeinspecifieke kennis tot systematisch onjuiste oplossingen. Veenman en Kerseboom (1997) constateerden dat meer dan de helft van hun proefpersonen (12-13 jr.) de betekenis van “anderhalf keer zo groot” niet kenden. Menig leerling interpreteerde “anderhalf keer zo groot” als “twee-en-een-half keer zo groot”, hetgeen leidde tot volstrekt onmogelijke oplossingen voor het gegeven probleem. Dergelijke conceptuele kennis wordt door de meeste leerlingen niet spontaan opgepikt tijdens het oplossen van complexe problemen (Veenman, 1993), zoals dat door de methode van realistisch rekenen wordt voorgestaan. Expliciete uitleg over onvoldoende beheerste begrippen, liefst gecombineerd met expositorisch materiaal (bijvoorbeeld Dienesblokken of de getallenlijn), lijkt hier de aangewezen methode.

Metacognitieve kennis. Dit betreft de “zelfkennis” die de leerling heeft over het samenspel van persoonskenmerken, taakkenmerken en strategiekenmerken (Flavell, 1979). Een leerling kan bijvoorbeeld van zichzelf weten (= persoonskenmerk) dat hij bij staartdelen (= taakkenmerk) zichzelf zou moeten controleren (= strategiekenmerk). Ook voor metacognitieve kennis geldt dat de kennis niet altijd correct hoeft te zijn (Veenman, 2011). Een leerling kan ten onrechte denken dat hij zichzelf niet hoeft te controleren bij staartdelen. Bovendien hoeft correcte metacognitieve kennis niet te leiden tot een adequate aansturing van het gedrag (zie metacognitieve vaardigheden). Een leerling kan bijvoorbeeld niet in staat zijn om zichzelf te controleren (omdat hij de som niet op een andere manier kan uitrekenen of kan terugrekenen naar de gegevens). Anderzijds kan de leerling geen zin hebben om dergelijke extra controle-activiteiten uit te voeren omdat de taak niet leuk of irrelevant gevonden wordt. In de ontwikkeling van metacognitie wordt het beschikken over metacognitieve kennis wel gezien als een fase die voorafgaat aan het verwerven van metacognitieve vaardigheden waarmee het probleemoplosgedrag wordt aangestuurd en gecontroleerd (Veenman, 2011). Voordat een leerling bereid is de uitkomst van een staartdeling te controleren moet hij *weten* dat zijn staartdelingen niet altijd vlekkeloos verlopen. Het besef dat er fouten kunnen worden gemaakt, kan een leerling vervolgens motiveren tot een adequate, metacognitieve aansturing en controle van het rekenproces.

Vaardigheden

Geautomatiseerde basisvaardigheden. Basisvaardigheden[1] zijn basale, elementaire vaardigheidscomponenten die bij de uitvoering van een taak betrokken zijn. Bij het lezen van een opgave betreft dat bijvoorbeeld decodeerprocessen (het herkennen van letters en woorddelen) en het ophalen van woordbetekenissen uit het geheugen. Bij het rekenen zelf hebben basisvaardigheden betrekking op basale rekenkundige operaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van kleine getallen, het vergelijken van getallen etc.). Jonge leerlingen beschikken nog niet over dergelijke basisvaardigheden. Zij tellen bijvoorbeeld nog op hun vingers. Of bij het optellen van twee getallen tellen zij het eerste getal in hun werkgeheugen en tellen het tweede getal daar een-voor-een bij (Resnick & Ford, 1981). Naarmate de leerling vaardiger wordt in rekenen dienen deze basisvaardigheden meer geoefend en dus meer geautomatiseerd te zijn. De meest eenvoudige en meest frequente rekenprocedures (zoals het optellen van 3 en 4) worden uiteindelijk dermate geautomatiseerd, dat zij apart in het geheugen worden opgeslagen als zogenaamde getalsfeiten ("numberfacts"). Bij het optellen van "3 plus 4" hoeft een volwassene doorgaans niet meer na te denken; het getal "7" wordt rechtstreeks uit het geheugen opgediept als domeinspecifieke kennis. Toch duurt het opdiepen van getalsfeiten uit het geheugen bij grotere getallen (bijvoorbeeld "4 plus 5") langer dan bij kleinere getallen (bijvoorbeeld "2 plus 3"). Grotere getallen zijn dus inherent moeilijker dan kleinere getallen (Milikowski, 1995).

Het nut van automatisering van basisvaardigheden wordt duidelijk wanneer men meer complexe vaardigheden onder de loep neemt. Bij staartdelen is optellen slechts een van de vele deelprocedures. Wanneer een leerling tijdens het uitvoeren van zo'n complexe staartdeelprocedure nog steeds primitief (dus op de vingers) moet optellen, dan is er een aanzienlijke kans dat de leerling in de staartdeelprocedure vastloopt. De leerling kan namelijk door de aandacht voor dit specifieke onderdeel van de procedure het overzicht verliezen ("waar was ik ook-alweer gebleven?"). Verder kan overbelasting van het geheugen (teveel moeten onthouden op hetzelfde moment) leiden tot het "vergeten" van eerdere tussenproducten. De leerling gaat hakkelend lezen of verliest zich in deelhandelingen. Onvoldoende oefening en dientengevolge onvoldoende automatisering van basisvaardigheden kan derhalve één van de redenen zijn waarom meer complexe rekenprocedures vastlopen. De snelheidstoets (G1103) biedt een indicatie voor de automatisering van eenvoudige optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deeloperaties.

Domeinspecifieke strategieën. Elke ietwat complexe rekenhandeling bestaat uit deelhandelingen die in een bepaalde volgorde moeten worden uitgevoerd. Een domeinspecifieke strategie (bijvoorbeeld staartdelen of optellen) is een procedure voor het uitvoeren van de deelhandelingen op het juiste moment en in de juiste volgorde (zie het voorbeeld van de procedurebeschrijving boven). De domeinspecifieke strategie bestaat niet alleen uit een procedurevoorschrift van deelhandelingen (wat wanneer te doen?), maar omvat ook het beheersen van de benodigde deelhandelingen (hoe deze deelhandelingen uit te voeren). Beheersing van een complexe strategie veronderstelt derhalve dat de benodigde deelhandelingen door de leerling worden beheerst én in de juiste volgorde worden uitgevoerd. Voor aanvankelijke rekenaars vormt het optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen van elementaire getallen een domeinspecifieke strategie die door oefening wordt geautomatiseerd. De procedure kan dan een geautomatiseerde basisvaardigheid worden, of zelfs een getalsfeit (zie domeinspecifieke kennis). Overigens kan het hedendaags gebruik van de zakrekenmachine automatisering belemmeren. Voor meer complexe domeinspecifieke strategieën, zoals staartdelen, zal een procedurevoorschrift met beheersing van de benodigde deelvaardigheden altijd van belang zijn. Een gedachtenexperiment bij de som “deel 243 door 9” zou een fictief hardopdenk-protocol opleveren als: “243, dat is 24 gedeeld door 9, dus 18 gedeeld door 9 is 2, rest is 6, 6 en 3 is 63, gedeeld door 9 is 7, dus dat is 20 plus 7 is 27…” In dit geval is er nog steeds sprake van een zekere programmering van deelhandelingen, hoewel de uitvoering van de deelhandelingen zélf verder geautomatiseerd is. Samenvattend kan worden geconstateerd dat fouten ook kunnen ontstaan door het onvoldoende beheersen van een rekenprocedure (een verkeerde deelhandeling of een rekenhandeling op het verkeerde moment). Procesdiagnostiek (zie G0060) kan een dergelijke fout in de rekenprocedure aan het licht brengen.

Een specifieke categorie van procedurefouten wordt gevormd door de aanwezigheid van systematische fouten (“bugs”) in de procedure (VanLehn, 1990). Een voorbeeld van zo’n systematische fout bij aftrekken is het kleinste getal altijd van het grootste getal aftrekken. Neem bijvoorbeeld de som “134 - 58 = …?” Om de 8 af te kunnen trekken van de 4 zou er geleend moeten worden van de 3 (en voor het aftrekken van de 5 zou weer moeten worden geleend van de 1). Omdat lenen een lastige procedure is, gaan sommige leerlingen (12% van de 8-11 jarigen) ertoe over om het kleinste getal van het grootste af te trekken (“134 - 58 = 124”). Dezelfde leerling zou de aftreksom “63 - 17 = …?” systematisch fout moeten beantwoorden met “54”. Brown en VanLehn (1980) onderscheiden maar liefst 75 soorten systematische fouten bij het aftrekken van getallen onder de duizend, waarmee zij 33% van de gemaakte fouten van 8-11 jarigen konden verklaren. De meest frequente systematische fouten (ca. 60%) hebben te maken met problemen rond het lenen (bijvoorbeeld als er van een 0 moet worden geleend). Juist door de vele vormen die systematische fouten kunnen aannemen, blijkt het voor een leerkracht moeilijk om een systematische fout te herkennen en te diagnostiseren. Neem bijvoorbeeld een leerling die de navolgende uitkomsten geeft bij een serie optelsommen (Brown & Burton, 1978):

33	1091	8	28	90
+ 99	+ 60	+ 34	+ 70	+ 6
24	17	15	17	15

Probeer eerst zelf te bedenken wat deze leerling nu precies fout doet… Juist omdat geoefende rekenaars een getal als een geheel zien van duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden (bijvoorbeeld 1091 is 1000 plus 90 plus 1), blijkt het niet eenvoudig om hier te bedenken dat een leerling geen onderscheid maakt tussen duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden. De leerling in dit voorbeeld telt alle losse cijfers op. Nog moeilijker wordt het om systematische fouten te herkennen indien de leerling meer dan één systematische fout tegelijkertijd vertoont. Bovendien kan het beeld worden vertroebeld door niet-systematische, slordige rekenfouten die maar al te vaak voorkomen (Veenman & van Dam, 1997). Neem bijvoorbeeld de volgende reeks aftreksommen:

306	80	173	702	3005	7002	34	251
- 138	- 4	- 93	- 11	- 28	- 239	- 14	- 47
78	76	83	591	1078	4873	24	244

Het belangrijkste probleem van deze leerling is het lenen van een 0; er wordt dan dubbel geleend van het getal dat links van de 0 staat. In de som “306 - 138 = …?” moet 8 worden afgetrokken van 6 en dient er te worden geleend van de 0 links van de 6. Van een 0 kun je niet lenen, dus moet er volgens de leerling *twee keer* worden geleend van de 3 die links van de 0 staat. Dit probleem herhaalt zich bij de 4e t/m de 6e som (let wel: dit probleem treedt niet bij de 2e som op, waarbij rechtstreeks kan worden geleend van de 8). Daardoor wordt het lenen van nullen niet correct verrekend; indien er van een 0 wordt geleend en er dus van een getal links van de 0 moet worden geleend, dan wordt de 0 vervolgens als 10 opgevat, hoewel van die 0 is geleend (bij "306 - 138 =… ?" wordt de 3 van 10 afgetrokken in plaats van 9). Het tweede probleem van deze leerling betreft het aftrekken van gelijke cijfers. In plaats van een 0 wordt dan hetzelfde cijfer als antwoord gegeven ("3 - 3 = 3"). Tot slot maakt de leerling een slordigheidsfout in som 5 waarbij de positie van twee cijfers in het antwoord worden omgewisseld ("78" had "87" moeten zijn). Uit dit (realistische) voorbeeld blijkt dat het herkennen van systematische fouten niet altijd eenvoudig is. Dergelijke fouten kunnen middels de instaptoetsen worden gesignaleerd en vervolgens met procesdiagnostiek bij de leerling worden geverifieerd. Er bestaan overigens effectieve trainingsprogramma's voor het leren herkennen van systematische rekenfouten bij aftrekken en staartdelen door leerkrachten (Brown & Burton, 1978; De Corte, Verschaffel, & Schrooten, 1987; van Putten & Croes, 1995).

Hoewel veel van deze systematische fouten suggereren dat de gemaakte fout vooral gebaseerd is op het niet correct beheersen van een procedure, zoals de complexe procedure van het lenen, komen sommige van deze procedurefouten voort uit een tekort aan kennis van, bijvoorbeeld, het positiesysteem. Neem bijvoorbeeld de leerling die 5,30 moet vermenigvuldigen met 5,03 en daarbij de getallen niet netjes onder elkaar zet als gevolg van een gebrek aan kennis van het positiesysteem. Het antwoord kan luiden 28,09 (alle nullen achter de komma worden genegeerd), 2,709 of 27,09 (verdiscontering van respectievelijk 3 of 4 cijfers achter de komma), in plaats van het correcte antwoord van 26,659. Naast het corrigeren van dergelijke procedurefouten, zou remediëring zich derhalve ook moeten richten op een eventueel tekort aan domeinspecifieke kennis die ten grondslag kan liggen aan bepaalde systematische fouten (denk bijvoorbeeld ook aan het optelprobleem hierboven, waarbij het onderscheid tussen eenheden, tientallen etc. niet wordt gemaakt).

Metacognitieve vaardigheden. In een verhelderend voorbeeld dienen twee leerlingen de volgende redactiesom op te lossen: "Aan een rechte weg staan 20 bomen op een rij. De ruimte tussen twee bomen in telkens 2 meter. Als je een touw zou moeten spannen tussen de eerste en de laatste boom, hoeveel meter touw heb je dan nodig? Je hoeft geen rekening te houden met de dikte van de boom." De eerste leerling leest de opgave snel en oppervlakkig. Hij denkt: "20 bomen… telkens 2 meter…" en antwoordt tamelijk impulsief 40 meter. De tweede leerling leest de opgave eerst grondig door. Vervolgens besluit hij om een tekening van de situatie te maken. In de tekening worden ook de gegevens vermeld (20 bomen en de tussenruimten van 2 meter) en het gevraagde (de afstand tussen boom 1 en boom 20). Dan bedenkt hij een plannetje voor het uitrekenen van de opgave: "ik tel eerst het aantal tussenruimten… en dan doe ik dat aantal keer 2 meter… en dat is het antwoord". Dat plan wordt stapsgewijs uitgevoerd en leidt tot de uitkomst van 38 meter. Vervolgens wordt het antwoord geëvalueerd: "hm, 38… klopt dat?… wel een raar getal… laat ik het nog eens op een andere manier uitrekenen… 2, 4, 6, 8, 10… ja, 38 meter, dat moet goed zijn…". Tot slot worden de belangrijkste conclusies op een rijtje gezet: "dus als je 20 bomen hebt, dan zijn er 19… 20 min 1 tussenruimten… ja."

Deze laatste leerling vertoont een ideaal probleemoplosgedrag. Het zich grondig oriënteren op de taak, het planmatig en systematisch te werk gaan, het controleren en evalueren van het eigen gedrag en het uiteindelijk op een rijtje zetten van de belangrijkste resultaten (recapituleren) zijn de kenmerken van wat een goede *metacognitieve vaardigheid* wordt genoemd (Flavell, 1979; Veenman, 2006, 2015b). Dergelijke activiteiten leiden het probleemoplosgedrag in goede banen; zij sturen, reguleren en controleren het probleemoplosgedrag. Het vastlopen of het maken van fouten tijdens de taakuitvoering wordt veelal veroorzaakt door het niet effectief kunnen aanwenden van metacognitieve vaardigheden.

Een grondige oriëntatie op en analyse van het probleem (de opgave) scheidt relevante van irrelevante gegevens en maakt duidelijk wat het verschil is tussen de begintoestand (de gegevens waarmee gewerkt moet worden) en de doeltoestand (het gevraagde). Het niet grondig lezen van de gehele opgave leidt veelal tot een onjuiste voorstelling van de opgave. Impulsieve, ondoordachte antwoorden zijn dan dikwijls het gevolg. Metacognitief zwakke leerlingen blijken bijvoorbeeld de eerste twee getallen die zij in de opgave tegenkomen op te tellen, ongeacht de aard van de opgave. Zij zien door de bomen het bos niet meer en vallen terug op een “makkelijke” rekenprocedure die zij wél beheersen. Het eerst op een rijtje zetten van de gegevens en het gevraagde (liefst op papier, als een soort geheugensteuntje) reduceert de hoeveelheid informatie die in het werkgeheugen beschikbaar moet zijn tijdens het probleemoplossen. Op grond van die begin- en doeltoestand kan een handelingsplan worden bedacht. Dit handelingsplan bevat de stappen, bewerkingen of operaties waarmee men denkt tot de doeltoestand te kunnen komen. Dit plan dient vervolgens stap-voor-stap te worden uitgevoerd. Het niet plannen van probleemoplosactiviteiten leidt veelal tot rommelig gedrag, waarbij de leerling geen overzicht meer heeft over zijn handelingen. Er wordt opgeteld waar er moet worden afgetrokken en er wordt vermenigvuldigd waar er moet worden gedeeld. Als er dan iets fout gaat in het probleemoplosproces, blijkt het erg moeilijk om na te gaan waar, wanneer en hoe die fout is gemaakt omdat er geen helder spoor van probleemoplosactiviteiten bestaat. Een handelingsplan dat systematisch wordt uitgevoerd is derhalve onontbeerlijk voor een adequate procesbewaking (monitoring) tijdens de taakuitvoering. Monitoring helpt de leerling om alert te zijn op eventuele fouten die onderweg worden gemaakt en om na te gaan of er vooruitgang wordt geboekt naar het einddoel (een adequaat antwoord). Wanneer er tenslotte een uitkomst is gevonden dient deze uitkomst ook te worden gecontroleerd (evaluatie). Controle van de uitkomst betreft niet alleen het corrigeren van rekenfouten, maar ook het nagaan of de uitkomst een antwoord geeft op de vraag. De uitkomst dat Kees nu 10 knikkers heeft vormt immers geen antwoord op de vraag hoeveel knikkers Kees meer heeft dan Klaas. Onderzoek heeft uitgewezen dat veel leerlingen (jonger dan 14 jr.) geneigd zijn deze evaluatiefase over te slaan, zelfs na het geven van instructies over het evalueren (De Corte & Verschaffel, 1980; Van der Stel, Veenman, Delen, & Haenen, 2010; Veenman, Kok, & Blöte, 2005). Voor deze leerlingen betekent het vinden van de eerste-de-beste uitkomst meteen ook het einde van de opgave. Zelfs wanneer het goede antwoord is gevonden heeft het zin om achteraf het probleemoplosproces nog eens door te lopen, terug te blikken op wat er goed en wat er fout is gegaan, en lering te trekken van het eigen probleemoplosgedrag. Deze recapitulatie- en reflectiefase leidt tot betere opslag in het geheugen, zodat eenzelfde probleem bij een volgende gelegenheid effectiever kan worden opgelost. Samenvattend kan worden gesteld dat metacognitieve vaardigheden als probleemanalyse, planning, systematisch handelen, procesbewaking, evaluatie en recapitulatie bepalend zijn voor de kwaliteit van de selectie en het verloop van de rekenprocedures bij het oplossen van een probleem.

Uit onderzoek (van Essen, 1991; Veenman, 2006; Veenman & van Dam, 1997) blijkt dat vooral beginnende rekenaars last hebben van een gebrekkige metacognitieve aansturing van en controle over hun probleemoplosgedrag. Bovendien blijken laag-intelligente leerlingen over relatief minder adequate metacognitieve vaardigheden te beschikken dan hoog-intelligente leerlingen (Van der Stel & Veenman, 2014; Veenman, 2006). Op elk intelligentie-niveau blijken er evenwel aanzienlijke verschillen in metacognitieve vaardigheid te bestaan. Bij leerlingen met een laag intelligentie-niveau kan een goede metacognitie compenseren voor hun lagere intelligentie, waardoor zij goed kunnen presteren op rekentaken. Verrassend genoeg blijkt dat ook bijna de helft van de hoogbegaafde leerlingen (IQ ≥ 130) zwak tot zeer zwak metacognitief gedrag vertoont (Veenman, 2015b). Zij vertrouwen louter op hun intelligentie bij het maken van school-taken en daarom neigen zij ertoe hun metacognitieve vaardigheden minder te ontwikkelen. Dat gaat goed zolang het eenvoudige rekenopgaven betreft, maar zij komen in de problemen wanneer de opgaven meer complex worden bij wiskunde. Metacognitieve vaardigheden beïnvloeden het reken-leerproces derhalve positief, deels los van en bovenop de invloed van intelligentie (Van der Stel & Veenman, 2014; Veenman, 2008).

Stappenplan

1) het grondig lezen van de gehele opgave:
   a) markeer of onderstreep belangrijke woorden in de opgavetekst
   b) maak onderscheid tussen relevante en irrelevante zaken
2) het maken van een tekening of schets
3) nagaan wat gevraagd wordt
4) nagaan wat gegeven is
5) het schatten van het antwoord
6) het bedenken van een handelingsplan:
   a) bedenk welke getallen je nodig hebt om de som te kunnen oplossen?
   b) bedenk welke berekeningsstappen je moet uitvoeren
7) systematische uitvoering van het handelingsplan
8) noteren van elke uitgevoerde berekeningsstap
9) monitoring tijdens de uitvoering
10) antwoord formulering
11) controle van de uitkomst
12) evaluatie antwoord
13) geef het antwoord.
14) Kijk terug naar hoe je de opgave hebt opgelost:
    a) Wat is er goed gegaan?
    b) Wat is er fout gegaan en waarom?

Figuur 1. Stappenplan voor het trainen van metacognitieve vaardigheden.

De ene leerling blijkt, hoewel van hetzelfde intelligentieniveau, metacognitief niet gelijk aan de andere leerling. Trainingsonderzoek wijst bovendien uit dat ook MLK-leerlingen (Jaspers & van Lieshout, 1989) en laag-intelligente leerlingen (Veenman e.a., 2005) baat hebben bij een dergelijke training.

Een leerling met zwakke metacognitieve vaardigheden kan men dus helpen door het geven van een metacognitieve training. Veelal bestaat die training uit het aanleren van een stappenplan tijdens het maken van rekensommen (De Corte & Verschaffel, 1980; Sandberg & de Ruiter, 1985; Jaspers & van Lieshout, 1989; Mevarech & Fridkin, 2006; Veenman, 2013, 2015a; Veenman e.a., 2005)[2]. Een voorbeeld van een zéér uitgebreid stappenplan kan in Figuur 1 worden gevonden. Het voordeel van het aanleren van (delen van) zo'n stappenplan is dat niet alleen aan de leerling duidelijk wordt gemaakt welke metacognitieve vaardigheden moeten worden aangewend, maar tevens wanneer dat moet gebeuren. Bijvoorbeeld, het maken van een tekening is vooral zinvol in de aanvangsfase van het oplossen van een rekenprobleem, wanneer moet worden begrepen waarover het probleem gaat (van Essen, 1991). Belangrijk is dan om in de gaten te houden of de gemaakte tekening echt betrekking heeft op de opgave. De instructie om een tekening te maken bij de opgavetekst leidt bij veel jonge leerlingen (ca. 10-11 jaar) ertoe dat zij zeer fraaie tekeningen maken, die echter nauwelijks over de opgave gaan (van Essen, 1991). Bij de bovenstaande opgave over de twintig bomen wordt een paar bomen en een prachtige zon met een glimlachend gezicht getekend (maar niet de twintig bomen met de negentien tussenruimten). De leerling moet derhalve duidelijk worden gemaakt *wat* een zinvolle tekening is, *wanneer* en *waarom* het maken van een tekening zinvol is, en *hoe* je zo'n tekening maakt. Deze "Wat-Wanneer-Waarom-Hoe"-regel (WWW&H-regel; Veenman, 2013) geldt evenzeer voor de overige stappen uit het stappenplan. Bij de WWW&H-regel voor het trainen van metacognitieve vaardigheden horen vier instructie-principes:

1) De instructie van metacognitieve vaardigheden moet worden ingebed in de taakcontext (Volet, 1991; Veenman, 2013). Zonder deze expliciete koppeling van metacognitieve vaardigheden aan specifieke probleemoplosactiviteiten, leert de leerling niet welke metacognitieve vaardigheid op welk

moment aan te wenden (*Wat* & *Wanneer*). Het aanbieden van algemene metacognitieve instructies, los van de taakuitvoering zélf (bijvoorbeeld op een apart blaadje gepresenteerd, voorafgaand aan de feitelijke probleemsituatie), blijkt niet tot enige verbetering van het metacognitieve repertoire te leiden (de Jong & Ferguson-Hessler, 1984; Stoutjesdijk & Beishuizen, 1992). De leerling dient tijdens de taakuitvoering expliciet aangereikt te krijgen welke activiteiten wanneer uit te voeren.

2) De leerling moet duidelijk worden gemaakt wat het nut of de meerwaarde is van het uitvoeren van deze metacognitieve activiteiten (Campione, Brown, & Ferrara, 1982; Veenman, 2013). Indien metacognitieve vaardigheden niet uit zichzelf worden aangewend door de leerling, dan zal het uitvoeren van geïnstrueerde metacognitieve activiteiten in eerste instantie extra moeite kosten en extra beslag leggen op het werkgeheugen. De leerling zal alleen bereid zijn deze extra moeite te investeren als het nut (*Waarom*) ervan wordt uitgelegd. Uit video-opnames is bekend dat docenten wel zelf metacognitieve vaardigheden toepassen in hun lessen, maar zij besteden nauwelijks aandacht aan het *Waarom* van deze activiteiten (Veenman, 2011). Juist zwakke leerlingen haken dan af, omdat de rekentaak zelf voor hen al een grote belasting vormt. Zij moeten worden overtuigd dat metacognitieve vaardigheden hen iets oplevert in termen van tijdswinst, het gemak waarmee ze de som aanpakken, een vermindering van fouten en een beter cijfer (Veenman, 2015a).

3) In het verlengde van het tweede instructie-principe, dient de training voldoende lang te worden voortgezet opdat de uitvoering van metacognitieve activiteiten adequaat wordt geoefend en voldoende wordt geautomatiseerd (Veenman, 2013). Dit om te voorkomen dat metacognitieve activiteiten bij meer complexe, vergelijkbare opgaven in de verdrukking komen (zie geautomatiseerde basisvaardigheden). Over de noodzakelijke duur van een effectieve training bestaan meningsverschillen. Een enkele, eenvoudige stap (bv. het grondig lezen van de gehele opgave) is makkelijker en sneller aan te leren dan meervoudige of complexe stappen (bv. het bedenken van een handelingsplan). Daarnaast is het belangrijk om onderscheid te maken tussen een beschikbaarheidsdeficiëntie en een productiedeficiëntie (Veenman, Kerseboom, & Imthorn, 2000). Leerlingen met een *beschikbaarheidsdeficiëntie* hebben geen metacognitieve vaardigheden tot hun beschikking. Zij moeten deze vaardigheden nog volledig verwerven, waardoor het aanleren van het stappenplan én de bijbehorende metacognitieve activiteiten meer tijd in beslag neemt. Leerlingen met een *productiedeficiëntie* beschikken wel over metacognitieve vaardigheden en kunnen die vaardigheden ook uitvoeren, maar ze weten niet welke vaardigheden op welk moment toe te passen. Voor deze leerlingen betekent het aanleren van het stappenplan vooral het leren van de juiste volgorde van activiteiten (*Wat* en *Wanneer* uit de WW-W&H-regel). Dat zal minder tijd in beslag nemen omdat zij de activiteiten zélf al beheersen.

Voor de duur van de training blijkt verder de omvang van het stappenplan van belang. Voor de training van een beperkt aantal stappen tijdens een specifiek soort opgaven blijkt een uur instructie voldoende om effect te sorteren op de rekenprestatie (Veenman e.a., 2005). Voor de instructie van een uitgebreid stappenplan daarentegen dient de training een langere periode te bestrijken, over meer trainingssessies te worden herhaald (gespreid leren), en bij voorkeur te worden aangeboden bij verschillende soorten rekenopgaven om transfer te bevorderen. Het consequent aanbieden van zo’n complex stappenplan in het curriculum kan tot een aanzienlijke verbetering van studieresultaten leiden (cf. Mettes, Pilot, & Roossink, 1981).

4) Het laatste instructie-principe heeft betrekking op *Hoe* metacognitieve vaardigheden kunnen worden overgedragen. Ten onrechte wordt soms door docenten en ouders verondersteld dat leerlingen zelf wel weten hoe zij metacognitieve vaardigheden moeten toepassen. Leerlingen worden bij-

voorbeeld verteld dat zij moeten gaan plannen, maar er wordt niet uitgelegd hoe dat plannen in zijn werk gaat. Voor leerlingen met een beschikbaarheidsdeficiëntie is die uitleg van *Hoe* te plannen echter noodzakelijk omdat zij anders niet weten wat zij moeten doen om een plan te maken (Veenman, 2015a). Hetzelfde geldt voor het controleren van uitkomsten. Dan moet je aan leerlingen laten zien dat je een uitkomst kunt schatten en de uitkomst van je berekening daarmee kunt vergelijken, dat je een berekening kunt nalopen om fouten op te sporen, of dat je van de uitkomst kunt terugrekenen naar de gegevens in de opgave.

Een algemene instructiemethode is het modeleren (“modellen”) van metacognitieve vaardigheden (Veenman, 2013). De docent doet een vaardigheid voor tijdens het maken van een rekensom, waarbij uitleg wordt gegeven van de WWW&H van die vaardigheid. Vervolgens mag de leerling de vaardigheid zelf uitvoeren onder het toeziend oog van de docent die feedback geeft en zo nodig corrigeert. Tenslotte dient de leerling de vaardigheid voldoende te oefenen totdat de uitvoering soepel verloopt en de leerling weinig moeite kost. Doel van voldoende oefening is dat de metacognitieve vaardigheid een vanzelfsprekend onderdeel wordt van de aanpak van de leerling. Dan gaat de leerling merken dat hij er baat bij heeft om de vaardigheid te blijven uitvoeren. Bij modeleren is het belangrijk om het aantal vaardigheden of stappen per trainingssessie te beperken. Het is effectiever om één of twee vaardigheden of stappen uitgebreid aan de orde te stellen in één les, om daar in een volgende les weer twee nieuwe vaardigheden aan toe te voegen, dan om het hele stappenplan in één les aan te bieden (Veenman, 2015a). Leerlingen dreigen anders door de bomen het bos niet meer te zien, verschillende stappen met elkaar te verwarren, of de stappen niet als een geordende sequentie uit te voeren maar als één mega-operatie (waarbij er van alles fout kan gaan).

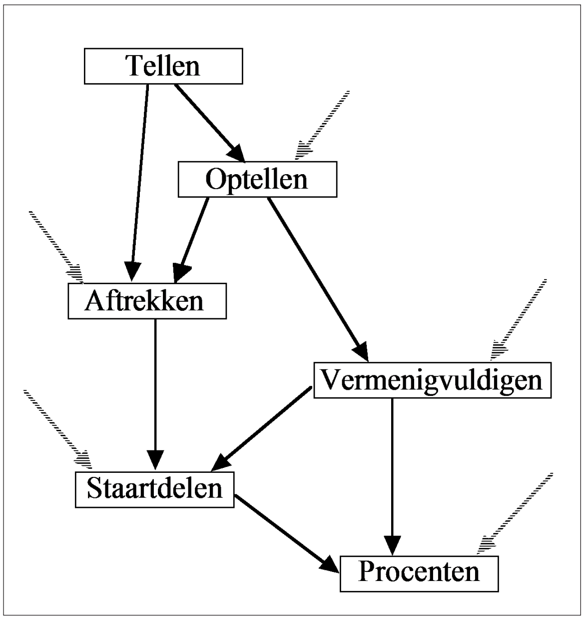
Modeleren kan klassikaal plaatsvinden, individueel in één-op-één situaties, of in kleine groepjes. Een bijzondere vorm van modeleren is “Reciprocal Teaching” (Brown & Palinscar, 1984). Volgens deze instructiemethode werken leerlingen in kleine groepjes waarbij de leerkracht in eerste instantie als model voor ideaal metacognitief gedrag fungeert. Vervolgens wordt in deze groepjes de WWW&H-regel aan de hand van concrete uitwerkingen van opgaven door de leerlingen zelf becommentarieerd, waarbij de rol van discussieleider rouleert tussen leerlingen in de groep. De leerkracht fungeert, indien nodig, als coach en model. Vragen als “waarom doe je dit nu?…” en “hoe moet je dit doen?…” moet leerlingen uitlokken om te reflecteren op hun probleemoplosgedrag. De bedoeling is dat de leerlingen uiteindelijk zelfstandig leren opereren tijdens de uitwerking van opgaven. Reciprocal teaching kan worden beschouwd als een instructiemethodiek die de WWW&H-regel levendig maakt voor leerlingen. Zo’n metacognitieve training in de context van samenwerkend leren kan zeer effectief zijn voor het verwerven van metacognitieve vaardigheden én het verbeteren van de rekenprestatie (Kramarski & Mevarech, 2003).

Borkowski, Teresa Estrada, Milstead en Hale (1989) voegen hier nog een vijfde instructie-principe aan toe, dat specifiek betrekking heeft op leerlingen met leermoeilijkheden. Volgens Borkowski c.s. dient een metacognitieve training van deze leerlingen te worden gecombineerd met een herattributie-training. Leerlingen met leermoeilijkheden geloven veelal dat zij hun prestatie op een taak niet zelf kunnen beïnvloeden, waardoor een lage zelfwaardering hebben en verwachten te falen op die taak. Zij ontwikkelen daardoor aangeleerde hulpeloosheid. Een herattributie-training waarin hen wordt geleerd dat zij wél in staat zijn hun prestaties te beïnvloeden, bijvoorbeeld door het aanwenden van metacognitieve vaardigheden, kan die geleerde hulpeloosheid doorbreken.[3]

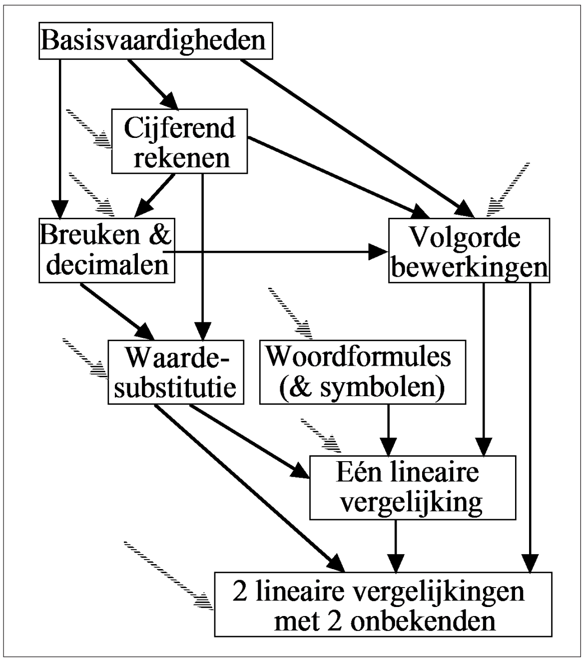
Het uitgebreide stappenplan uit Figuur 1 dient uitsluitend te worden getraind indien alle stappen daadwerkelijk bijdragen aan het probleemoplosproces. Dat is doorgaans het geval bij contextrijke opgaven (zoals redactiesommen of realistische rekenopgaven) of bij opgaven die van de leerling een nieuwe, onbekende rekenhandeling vereisen (en waarbij de leerling de bedoeling van de opgave moet achterhalen; zie Instaptoets G 1103, opgave 1.4.10). Opgaven die vooral de routine en de mate van automatisering van basisvaardigheden toetsen, doen slechts een beperkt beroep op metacognitieve vaardigheden. Bij "kale" rekensommen ("24 min 17…"), bijvoorbeeld, heeft het weinig zin om allerlei oriëntatie-activiteiten uit Figuur 1 te verrichten. Oriëntatie bestaat dan eerder uit de herkenning van het probleemtype ("dit is een aftreksom"). Dientengevolge moet de metacognitieve training worden aangepast aan het soort oriëntatie-activiteiten dat de taak vergt ("Ga telkens na wat voor soort som het is."). Herkenning van het probleemtype leidt dan direct tot een bestaand handelingsplan (een bekende procedure), indien voorhanden bij de leerling. Wel relevant blijft Stap 11, de controle van de uitkomst (bijvoorbeeld door terug te rekenen; "24 min 17 is… 7, ja… want 17 plus 7 is 24…"). Dit voorbeeld vormt een pleidooi voor een flexibele toepassing van het stappenplan uit Figuur 1. Afhankelijk van de aard en complexiteit van rekenopgaven dient men de voor die opgaven relevante metacognitieve handelingen te *selecteren* en, zo nodig, de aard van die handeling *aan te passen* aan de specifieke taakvereisten. Naarmate de complexiteit van opgaven (zowel de conceptuele als procedurele complexiteit van opgaven) toeneemt, stijgt de relevantie van een adequate metacognitieve aansturing van het probleemoplosproces (Veenman & Elshout, 1999). Metacognitieve vaardigheden zullen derhalve in toenemende mate een rol spelen in de domeinen die volgen op domein G 1000.

Een hiërarchisch model voor rekenkundige vaardigheden

Een belangrijke consequentie van het hierboven geschetste model voor het opbouwen van rekenkundige kennis en vaardigheden is dat het verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden voortborduurt op eerder verworven kennis en vaardigheden. Bijvoorbeeld het begrijpen wat een percentage is (zelfs bij eerstejaars psychologiestudenten nog een probleem, cf. Veenman & Elshout, 1991) veronderstelt dat leerlingen begrijpen wat een deel-geheel-relatie is (De Corte & Verschaffel, 1980). Het niet beheersen van een rekenkundige procedure komt niet alleen voort uit een gebrek aan beheersing van de noodzakelijke domeinspecifieke vaardigheden (denk aan het voorbeeld van het modale inkomen). Juist bij het verwerven van rekenkundige kennis en vaardigheden is er sprake van een opeenstapeling, een cumulatie van eerder verworven kennis en vaardigheden (zie Figuur 2). Voor het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden dient de leerling een lineaire formule te herkennen en symbolen te kunnen substitueren voor een bepaalde waarde. Verder vraagt het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden een domeinspecifieke strategie, namelijk het gelijkmaken van één variabele waarbij de andere variabele door optelling of aftrekking van beide vergelijkingen kan worden opgelost (de vergelijkingen 4X-2Y=1 en X+Y=4 kunnen, bijvoorbeeld, worden herschreven als 2X-Y=0.5 en X+Y=4, waarna optelling van beide vergelijkingen leidt tot 3X=4.5, X=1.5 en na substitutie tot Y=2.5). Daarbij wordt een beroep gedaan op allerlei basisvaardigheden. Indien de benodigde kennis en vaardigheden onvoldoende worden beheerst, loopt het oplosproces spaak. Zelfs de methode van realistisch rekenen kan soms tot verrassende conclusies leiden die weinig met de mathematische structuur te maken hebben. Leerlingen die het principe van machtsverheffen leren aan de hand van een "realistisch" voorbeeld van voortplantend kroos in een vijver, kunnen blijven steken in dat specifieke voorbeeld en denken: "machtsverheffen, dat is iets met kroos in een vijver" (Meijer, 1996; Riemersma & Meijer, 1995). Niet alleen de opbouw van domeinspecfieke kennis blijkt het probleemoplosproces bij beginnende rekenaars te bespoedigen. Bij het oplossen van meer complexe opgaven blijkt vooral de (cognitieve en metacognitieve) kennis van de vereiste rekenkundige operaties een rol te spelen (Veenman & van Dam, 1997).



Figuur 2. Hiërarchisch model voor het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden.



Figuur 3. Hiërarchisch model voor Basisvaardigheden (als grondslag voor procent-rekenen.

De opzet van deze RT-map Rekenen en wiskunde reflecteert het bovenstaande hiërarchische model van de opbouw van kennis en vaardigheden voor rekenen en wiskunde. Domeinen met een hoger nummer veronderstellen de voorkennis een vaardigheden die in domeinen met een lager nummer aan de orde komen (bijvoorbeeld domein 2 veronderstelt de beheersing van kennis en vaardigheden uit domein 1, domein 3 die uit voorgaande domeinen, etc.). Zelfs binnen domeinen is er sprake van een hiërarchische ordening (zie Figuur 3). Dit heeft consequenties voor de diagnostiek van reken- en wiskundeproblemen op domeinniveau en zelfs binnen domeinen. Voor elk geconstateerd reken- of wiskundeprobleem dient eerst te worden vastgesteld of de leerling over de benodigde voorkennis en vaardigheden beschikt om opgaven op het betreffende niveau aan te kunnen. Bij een reken- of wiskundeprobleem op een bepaald niveau “x”, dient derhalve eerst te worden nagegaan of de leerling over alle kennis en vaardigheden binnen datzelfde niveau (x) of van een lager niveau (x-1) beschikt en of de leerling deze kennis en vaardigheden ook adequaat kan toepassen in vereiste situaties. De afname van de Instaptoets “x” en vervolgens de Instaptoets “x-1” kan een indicatie geven van eventuele tekorten qua benodigde kennis en vaardigheden. Wanneer ook Instaptoets “x-1” een onvoldoende beheersingsniveau bij de leerling aantoont, dan dient vervolgens Instaptoets “x-2” te worden afgenomen. Enzovoorts. Het recursief afnemen van Instaptoetsen vormt derhalve een belangrijk, primair diagnostisch instrument. Als er vervolgens in de procesdiagnose op een zeker domeinniveau een tekort wordt geconstateerd (voor de algemene procedure, zie G 0060), dan kan op dat specifieke niveau worden geremedieerd (zie Hulpsuggesties bij de diverse domeinen). Daarna kan er door afname van Controletoetsen successievelijk worden nagegaan of fouten in vervolgprocedures zijn hersteld of dat er verdere fouten, hoger in de hiërarchie, moeten worden geremedieerd (“hill climbing”). Op deze wijze kunnen Instap- en Controletoetsen een zinvolle rol spelen in de signalering van specifieke leerproblemen.

Literatuurreferenties

Beishuizen, M., Putten, C. M. van, & Mulken, F. van (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning & Instruction*, *7*, 87-106.

Berg, W. van den, Eerde, H. A. A. van, & Klein, A. S. (1993). *Proef op de som*. Rotterdam: Risbo.

Borkowski, J. G., Teresa Estrada, M., Milstead, M., & Hale, C. A. (1989). General problem-solving skills: Relations between metacognition and strategic processing. *Learning Disability Quarterly*, *12(4)*, 57-70.

Brown, A. L., & Palincsar, A. S. (1987). Reciprocal teaching of comprehension skills: a natural history of one program for enhancing learning. In J. D. Day, & J. G. Borkowski (Eds.). *Intelligence and exceptionality: New directions for theory, assessment, and instructional practices* (pp. 81-131). Norwood, NJ: Ablex.

Brown, J. S., & Burton, R. B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, *2*, 155-192.

Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, *4*, 379-426.

Campione, J. C., Brown, A. L., & Ferrara, R. A. (1982). Mental retardation and intelligence. In R.J. Sternberg (Ed.), *Handbook of human intelligence* (pp. 392-490). Cambridge: Cambridge University Press.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1980). Een exploratief onderwijsexperiment met aanvankelijke rekenopgaven bij 6- à 8-jarige kinderen. *Pedagogische Studiën*, *57*, 433-448.

De Corte, E, Verschaffel, L., & Schrooten, H. (1987). Using a computer for training the skill of diagnosing errors in addition and substraction. In J. Moonen, & T. Plomp (Eds.), *Development in educational software and courseware* (pp. 41-47). Oxford: Pergamon.

Elshout, J. J. (1987). Probleemoplossen als context voor leren probleemoplossen. *Nederlands tijdschrift voor de psychologie, 42*, 344-353.

Essen, G. van (1991). *Heuristics and arithmetic word problems*. Academisch proefschrift. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. *American Psychologist*, *34*, 906-911.

Gagné, E. D., Yekovich, C. W., & Yekovich, F. R. (1993). *The cognitive psychology of school learning*. New York: HarperCollins.

Jaspers, M. W. M., & Lieshout, E. C. D. M. van (1989). Een trainingsprogramma voor kinderen met leerproblemen gericht op het aanleren van concrete representaties voor redactie-opgaven. *Pedagogische Studiën*, *66*, 240-255.

Jong, T. de, & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1984). Strategiegebruik bij het oplossen van problemen in een semantisch rijk domein: electriciteit en magnetisme. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, *9*, 3-15.

Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, *40*, 281-310.

Meijer, J. (1996). *Learning potential and fear of failure*. Amsterdam: Bauer.

Mettes, C. T. C. W., Pilot, A., & Roossink, H. J. (1981). Linking factual and procedural knowledge in solving science problems: a case study in a thermodynamics course. *Instructional Science*, *10*, 333-361.

Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and Learning*, *1*, 85-97.

Milikowski, M. (1995). *Knowledge of numbers*. Academisch proefschrift. Amsterdam: University of Amsterdam.

Putten, C. M. van, & Croes, A. (1995). *Het analyseren en diagnostiseren door PABO-studenten van systematische rekenfouten*. Intern rapport. Leiden: Rijksuniversiteit Leiden.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Riemersma, F. S. J., & Meijer, J. (1995). *Wiskundig probleemoplossen met zelfgekozen hulp*. Amsterdam: SCO-Kohnstamm intistuut.

Sandberg, J. A. C., & Ruiter, H. de (1985). The solving of simple arithmetic story problems. *Instructional Science*, *14*, 75-86.

Stoutjesdijk, E., & Beishuizen, J. J. (1992). Cognitie en metacognitie bij het bestuderen van informatieve tekst. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, *17*, 313-326.

VanLehn, K. (1990). *Mind bugs*. Cambridge: MIT Press.

Van der Stel, M., & Veenman, M. V. J. (2014). Metacognitive skills and intellectual ability of young adolescents: A longitudinal study from a developmental perspective. *European Journal of Psychology of Education*, *29*, 117-137.

Van der Stel, M., Veenman, M. V. J., Deelen, K., & Haenen, J. (2010). Development of metacognitive skills in mathematics. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *42*, 219-229.

Veenman, M. V. J. (1993). *Intellectual ability and metacognitive skill: Determinants of discovery learning in computerized learning environments*. Academisch proefschrift. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Veenman, M. V. J. (2006). The role of intellectual and metacognitive skills in math problem solving. In A. Desoete, & M. V. J. Veenman (Eds.), *Metacognition in mathematics education* (pp. 35-50). Hauppauge: Nova Science Publishers.

Veenman, M. V. J. (2008). Giftedness: Predicting the speed of expertise acquisition by intellectual ability and metacognitive skillfulness of novices. In M. F. Shaughnessy, M. V. J. Veenman, & C. Kleyn-Kennedy (Eds.), *Meta-cognition: A recent review of research, theory, and perspectives* (pp. 207-220). Hauppage: Nova Science Publishers.

Veenman, M. V. J. (2011). Learning to self-monitor and self-regulate. In R. Mayer & P. Alexander (Eds.), *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 197-218). New York: Routledge.

Veenman, M. V. J. (2013). Training metacognitive skills in students with availability and production deficiencies. In H. Bembenutty, T. Cleary, & A. Kitsantas (Eds.), *Applications of Self-Regulated Learning across diverse disciplines: A tribute to Barry J. Zimmerman* (pp. 299-324). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Veenman, M. V. J. (2015a). *Het onderkennen en herkennen van metacognitieve vaardigheden en metacognitieve deficiënties. Werkboek workshop voor docenten.* Hillegom: Instituut voor Metacognitie Onderzoek.

Veenman, M. V. J. (2015b). Metacognitie: "Ken uzelve". Gebruik die kennis vooral om het eigen gedrag te sturen. *De Psycholoog*, *50(4)*, 10-21.

Veenman, M. V. J., & Dam, M. J. van (1997). Het metacognitief sturen van inzichtsprocessen bij het oplossen van redactiesommen. In E. de Corte e.a. (Red.), *ORD '97, onderwijsonderzoek in Nederland en Vlaanderen 1997* (pp. 259-260). Leuven: KU Leuven.

Veenman, M. V. J., & Elshout, J. J. (1991). Intellectual ability and working method as predictors of novice learning. *Learning and Instruction*, *1*, 303-317.

Veenman, M. V. J., & Elshout, J. J. (1999). Changes in the relationship between cognitive and metacognitive skills during the acquisition of expertise. *European Journal of Psychology of Education*, *14*, 509-523.

Veenman, M. V. J., & Kerseboom, L. (1997). *De relatie tussen metacognitieve vaardigheid en faalangst.* Intern rapport. Leiden: Rijksuniversiteit Leiden.

Veenman, M. V. J., Kerseboom, L., & Imthorn, C. (2000). Test anxiety and metacognitive skillfulness: Availability versus production deficiencies. *Anxiety, Stress, and Coping*, *13*, 391-412.

Veenman, M. V. J., Kok, R., & Blöte, A. W. (2005). The relation between intellectual and metacognitive skills at the onset of metacognitive skill development. *Instructional Science*, *33*, 193-211.

Verhoeven, L., & Vermeer, A. (1992). Woordenschat van leerlingen in het Basis- en het MLK-onderwijs. *Pedagogische Studiën*, *69*, 218-234.

Volet, S. E. (1991). Modelling and coaching of relevant metacognitive strategies for enhancing university students" learning. *Learning and Instruction*, *1*, 319-336.

Voetnoten

[1] Geautomatiseerde basisvaardigheden zijn de bouwstenen van complexere vaardigheden in het algemeen, en mogen derhalve niet worden verward met de specifieke basisvaardigheden uit domein 1 van deze uitgave.

[2] Ook bij andere schoolse vakken dan rekenen en wiskunde kan het aanleren van een stappenplan nuttig zijn, zoals bij het lezen of bestuderen van tekst (Veenman, 2013, 2015a). Zie bijvoorbeeld Remedial Teaching I: Lezen, A 5340, pag. 7.

[3] Zie ook de paragraaf over motivatie in Remedial Teaching I: Lezen, A 5205, pag. 2-3.