

# Theoretische achtergrond van 'Hulp bij leerproblemen: Rekenen-wiskunde' in het voortgezet onderwijs

Prof. Dr. J.E.H. (Hans) van Luit

## Inleiding

Het onderwijs aan kinderen die op school niet voldoende mee kunnen komen staat de laatste jaren meer in de belangstelling van wetenschappers en vakdidactici. Dit is voornamelijk ingegeven door de komst van de verplichte Rekentoets in het VO en MBO. Deze toets telt vanaf 2016 zelfs mee in de zak-slaag regeling voor het verkrijgen van een diploma. Nog steeds voeren in scholen voor voortgezet onderwijs zaken als het frontaal klassikaal lesgeven en de 'problematiek' rond de basisvorming de boventoon, maar toch is in de onderwijspraktijk van alledag de zorg voor de risico leerling merkbaar. Aan taalproblemen wordt de meeste aandacht besteed, ook al omdat op dit terrein aanvullende behandelingsmethodieken ontwikkeld zijn. Het onderwijs aan zwakke rekenaars in het voortgezet onderwijs beperkt zich over het algemeen tot het aanleren van vaardigheden, waarvan verondersteld wordt dat ze op de basisschool geleerd zijn. Hierbij worden veelal geen methoden gebruikt, maar uitleg op common sense niveau. De geboden hulp leidt dan ook vaak tot tegenvallende resultaten. Deze wijze van hulp bieden vloeit voort uit het feit dat in methoden voor voortgezet onderwijs slechts in geringe mate toegespitste leerstof voor achterblijvende kinderen is opgenomen. Bovendien zijn 'rekenen' en 'wiskunde' niet hetzelfde. Veel scholen voor voortgezet onderwijs hebben, door de ervaren nood gedwongen, in de loop van de jaren zelf voor de eigen school pakketjes van delen van basisschoolmethodes samengesteld. Uit die methodes zijn vooral de herhalingsstof en de 'gestuurde' oplossingsstrategieën gehaald en verder staat er oefenstof in voor specifieke

kennis, bijvoorbeeld voor 'breuken'. Hulp bestaat dan ook voornamelijk uit: regelmatige herhaling van instructie en het maken van werkbladen met gelijksoortige opgaven om de geconstateerde lacunes op te vullen.

Leerlingen die in het voortgezet onderwijs achterblijven bij rekenen-wiskunde hebben in de meeste gevallen onderwijs gehad op basis van een 'realistische' methode. Realistisch reken-wiskundeonderwijs, zoals we dat vandaag de dag in basisscholen aantreffen, betekent ten minste dat de inhoud van de methoden voldoet aan vijf door Treffers De Moor, en Feys (1987) aangereikte onderwijsprincipes:

- de dominerende plaats van contextproblemen, die zowel als bron voor begripsvorming en als toepassingsterrein dienst doen;
- de brede betekenis die aan het ontwikkelen van contexten, modellen, schema's, diagrammen en symbolen wordt toegekend;
- de grote en zelfs beslissende inbreng van de kinderen op de aard en de vorm van de leergang met als doel het omzetten van intuïtieve informele aanpakken in reflectieve, formele werkwijzen;
- het interactieve karakter van het onderwijsleerproces;
- de verstrengeling en structurering van leergangen.

Alle reken-wiskundemethodes voor het basisonderwijs die de laatste jaren zijn uitgegeven voldoen aan deze onderwijsprincipes. Er wordt daarin veel aandacht besteed aan het begrijpen van wat het doel is van

de opgaven en welke toepassingen er in de praktijk zijn. Het verschil met de vroegere traditionele methoden is dat er thans minder aandacht is voor het aanleren van specifieke vaardigheden, zoals de tafels van vermenigvuldiging, cijferend rekenen en breuken.

Dat betekent dat in scholen voor voortgezet onderwijs vaak de klacht wordt geuit dat specifieke strategiekennis bij een aantal zwakke rekenaars ontbreekt. De kinderen zijn wel 'gevoeliger' geworden voor wiskunde, maar het ontbreekt hen aan (technische) vaardigheden om problemen adequaat op te lossen. Veel zwakke rekenaars zijn bij het aanleren van rekenvaardigheden (zowel bij de technische kant daarvan als bij toepassingen), in eerste instantie gebaat bij een eenduidige structurering van alle fasen die in het oplossingsproces aan de orde worden gesteld (Van Luit, 2010). Dit betekent niet dat de leerstofinhouden zich zouden moeten beperken tot uitsluitend het leren van specifieke basale vaardigheden optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, breuken, procenten enzovoort). Ook voor zwakke leerlingen is het van belang te begrijpen en in te zien waar in het rekenen de link ligt tussen toepassingsmogelijkheden en geleerde vaardigheden in de praktijk van alle dag.

Zwakke rekenaars vinden het in het algemeen moeilijk om zelfstandig relaties te leggen tussen geleerde rekenvaardigheden en toepassingen in de praktijk. Krijgt een leerling een toepassingsopgave voorgelegd, bijvoorbeeld "Hoeveel moet ik betalen als

ik zes broodjes hamburger wil kopen die € 3,40 per broodje kost?", dan levert dat vaak problemen op. Van de leerling wordt immers verwacht dat hij dit vraagstuk oplost door het uitvoeren van een bewerking (zie figuur 1), die leidt tot zes keer het bedrag van 340 eurocent. Als de opgave door de leerling is opgelost, moet hij zich vervolgens afvragen of hij wel genoeg geld heeft om de zes broodjes te kunnen betalen.

Eigenlijk is bovenstaande nog een tamelijk eenvoudig probleem binnen de context van de alledaagse werkelijkheid. De meeste artikelen kosten in de winkel steevast net iets minder dan afgerond op een tental, bijvoorbeeld een diepvriespizza voor € 3,38 per stuk. Dat maakt dat naast hoofdrekenen schattend rekenen van belang is om rekenkennis toe te kunnen passen in de praktijk. Bij dit soort opgaven loopt een niet onaanzienlijk aantal zwakke rekenaars uit de laagste groepen van het voortgezet onderwijs vast.

In 'Hulp bij leerproblemen: Rekenen-wiskunde' wordt er daarom van uitgegaan dat het onderwijs aan deze kinderen zich sterk moet maken in het aanleren van vaardigheden gekoppeld aan de toepassingsproblemen die in methoden voor voortgezet onderwijs gevraagd worden. De werkwijze die wij in dit programma hanteren sluit hier bij aan. In tegenstelling tot dat wat in het huidige rekenen-wiskunde gangbaar is (leren in een context van toepassingen) zal in het aanbod in dit programma het accent gelegd worden op "vaardigheden aanleren en aansluitend leren toepassen".

Ons inziens is het mogelijk voor het onder-

$6 \times 340$ eurocent	(ineens uit het hoofd uitrekenen)
$340 + 340 + 340 + 340 + 340 + 340$	(herhaald optellen)
$6 \times 300 + 6 \times 40$	(associatief; middels optelling van twee eenvoudiger vermenigvuldigingen)
$6 \times 3$ (euro) + $6 \times 4$ (10 eurocent)	(een optelassociatie in muntsoorten)
$6 \times 350 - 6 \times 10$	(associatief; middels een aftrekking van twee eenvoudiger vermenigvuldigingen)

Figuur 1. Enkele probleemoplossingen bij de voorbeeldopgave.

wijs aan zwakke rekenaars, afhankelijk van hun potentiële kennisniveau, individuele doelstellingen te formuleren, waarin zowel de kwaliteit als de kwantiteit van te bereiken doelstellingen worden vastgesteld. Onder de kwaliteit wordt dan verstaan het inzicht in achterliggende rekenprocessen en met kwantiteit wordt de moeilijkheidsgraad van de aan te leren rekenstofdomeinen (zie verderop) bedoeld.

### Rekenproblemen bij zwakke rekenaars

Eén van de kenmerken van zwakke rekenaars is dat zij in beperkter mate leerbaar zijn dan competente leeftijdsgenoten. Dit kenmerk heeft verstrekende gevolgen voor het onderwijs want leerbaarheid heeft niet alleen te maken met factoren die kind specifiek zijn, maar ook met de wijze waarop taken en instructie bij het kind overkomen. De leerbaarheid van zwakke rekenaars is vaak groter dan verwacht wordt.

Om deze te optimaliseren is het van belang aan te sluiten bij de onderwijsbehoeften van individuele leerlingen. Dit betekent dat we bijvoorbeeld moeten weten over welke kennis de leerling beschikt, hoe de leerling het beste informatie verwerft en verwerkt, hoe hij in staat is zelfstandig kennis op te doen en te koppelen aan kennis die hij al heeft en aan welke wijze van instructie de leerling behoefte heeft. Veel beneden het gemiddelde presterende rekenaars zijn bijvoorbeeld slechts in geringe mate in staat spontaan juiste strategieën toe te passen, die voor het rekenen en haar toepassingsmogelijkheden onontbeerlijk zijn. Leerachterstand is voor een belangrijk deel door deze strategiezwakte bepaald (Ruijssenaars, Van Luit, & Van Lieshout, 2014; Van Luit, 2010). Dit heeft tot gevolg dat menig leerling zich op inadequate wijze oriënteert op een rekentaak, keuzes maakt voor aanpak en uitvoering en daarbij geen passende controlehandeling weet te gebruiken.

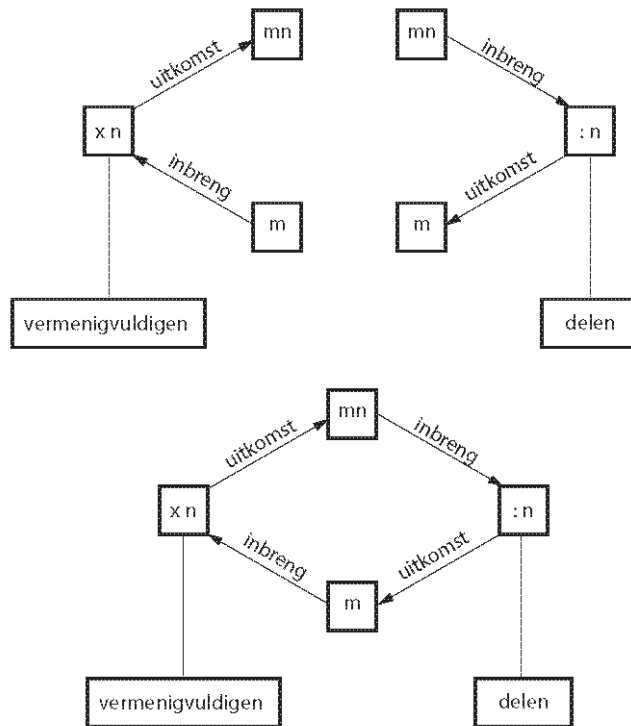
In het onderwijs zal met deze leerling-afhankelijke factor terdege rekening moeten worden gehouden. Dit kan indien de

wijze van instructie en de opbouw van de te leren vaardigheden zijn afgestemd op het kennisniveau van de leerling, zonder uitsluitend gefocust te zijn op individueel onderwijs. Veeleer kan gedacht worden aan groepsgericht onderwijs, waarbij terdege is nagedacht over de samenstelling van de groepjes leerlingen die gezamenlijk rekentaken gaan oplossen (Tieso, 2002; Van de Weijer-Bergsma & Prast, 2013). Zo is direct de verbinding tussen de leerling en het te geven onderwijs gelegd.

Onderwijs bepaalt in grote mate de mogelijkheden die het kind krijgt om zich, ook op het leerstof-terrein waar hij zwak in is, te ontplooien. Het onderwijs is daarmee een belangrijke leerling-onafhankelijke factor. Binnen het onderwijs dient sprake te zijn van een optimale afstemming tussen de leraar (degene die instructie geeft, daar waar nodig aanpassingen maakt en de leerling weet aan te spreken op een bij die leerling passend competentieniveau), het inhoudelijke rekenonderwijsaanbod, en de verwachtingen die de leerling van zichzelf heeft.

Dit is ook de reden dat Van Groenestijn, Van Dijken, en Janson (2012a; 2012b) pleiten voor onderwijs aan deze leerlingen door rekenspecialisten aangepast aan een bij hen passende begeleidingscategorie. Een van de grootste problemen waarmee we in het onderwijs aan zwakke rekenaars worden geconfronteerd is hun inadequate opslag van informatie. Dit betekent onder andere dat tussen verwante kennisgebieden door deze leerlingen geen verbindingen worden gelegd, maar ook dat zij geen koppelingen (numerieke of strategische associaties) leggen tussen de oplossing van een nieuwe opgave en nabijgelegen reeds gekende taken. Er is met andere woorden een gemis aan inzicht in het kunnen leggen van verbanden tussen bewerkingen binnen of tussen verschillende leerstofdomeinen. Een voorbeeld zal dit verduidelijken (zie figuur 2).

Uit figuur 2 blijkt dat leerlingen met een inadequate kennisstructuur veel meer se-



Figuur 2. Kennisstructuur van het vermenigvuldigen en delen zonder inzicht in de relatie hiertussen (boven) en met inzicht in de relatie hiertussen (onder).

parate kennis moeten opslaan om tot goede taakoplossingen te komen en dat controlehandelingen niet efficiënt kunnen plaatsvinden. Een leerling die geen inzicht heeft in de relatie tussen vermenigvuldigen en delen zal bij de oplossing  $270 : 9$  als controlehandeling bijvoorbeeld:

$$270 - 90 - 90 - 90 \text{ of zelfs } 270 - 9 - 9 - 9$$

uitvoeren, terwijl een leerling die wel inzicht heeft, een efficiëntere controlehandeling als  $30 \times 9$  of  $9 \times 30$  uitvoert.

Aangeleerde taken worden door kinderen die zwak zijn in rekenen dus niet of onvoldoende geautomatiseerd en reeds aangeleerde kennis wordt niet bewust geactualiseerd of gebruikt. Daardoor moeten steeds weer opnieuw stappen in het oplossingsproces herhaald worden. Het onderwijzen van een vaardigheid of een strategie betreffende een soort taak betekent dan ook geenszins, dat deze vaardigheid of strategie gemakkelijk generaliseert naar het gebruik

daarvan bij gelijksoortige taken (Van Luit, 2010). Deze bevindingen hebben duidelijke consequenties voor het reken-wiskundeonderwijs aan zwakke rekenaars.

Docenten in het voortgezet onderwijs zullen terdege rekening moeten houden met het feit dat een aantal aangeleerde vaardigheden in de basisschool juist door zwakke rekenaars niet is geautomatiseerd. Dat heeft zelfs betrekking op het niet automatiseren van de basisvaardigheden (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en verdelen), waardoor de oplossing van voor hen moeilijke taken langzaam verloopt.

### Het behandelen van rekenachterstand

Rekenonderwijs aan zwakke rekenaars houdt op basis van onderzoeksbevindingen in:

- herhalen en bewust actualiseren van al eerder aangeleerde en zelfs verworven leerstof,

- inslijpen van nieuw te verwerven en juist verworven kennis,
- relaties leggen (analogieën) met al verworven kennis,
- en controleren van de door de leerlingen gebruikte oplossingsstrategie(ën).

Ruijsenaars et al. (2014) geven aan dat het een misverstand is te veronderstellen dat rekenproblemen ontstaan door het onderwijs. Ze ontstaan wel in het onderwijs, zelfs als daar een realistische methode gebruikt is die volgens de ontwerpers optimaal is. Een 'optimale' methode kan uitval wellicht enigszins reduceren maar niet voorkomen of opheffen. Ruijsenaars en collega's wijzen er op dat het zinloos is te discussiëren over de vraag of rekenproblemen bestaan of gewoon een gevolg zijn van slecht onderwijs en of een aanpak van een bepaald type de beste oplossing is of niet. De beste oplossing bestaat niet, maar wordt gemaakt.

Toch zijn er waardevolle (orthodidactische) principes die in geval van falen belangrijk zijn. De bronnen voor die principes liggen in een aantal theoretische oriëntaties. Daar waar vakdidactische principes van belang zijn voor alle leerlingen, zo kunnen op andere theorieën gestoelde principes van belang zijn voor rekenzwakke kinderen. Zo zijn getalbeelden (Gestaltpsychologie), trapsgewijze procedure (handelingsleerpsychologie), zelfinstructie (cognitieve gedragstheorie) en empirische taakanalyse (cognitieve leerpsychologie) voorbeelden van principes, die daar waar nodig, bij leerlingen met een leerachterstand gebruikt kunnen worden. Eén of meerdere principes kunnen worden toegepast om er voor te zorgen dat de leerling wel leert associëren, automatiseren of keuzes maken uit strategieën.

Als we het hebben over hulp aan zwakke rekenaars bij aanvang van het voortgezet onderwijs dan kunnen we niet om het 1S- en 1F-niveau (Noteboom, Van Os, & Spek, 2011) heen die voor het rekenwiskunde-

onderwijs aan kinderen eind basisonderwijs worden gesteld. Willen we zwakke rekenaars in het voortgezet onderwijs rekenhulp bieden dan zal die hulp gebaseerd moeten zijn op voorwaardelijke kennis, die nodig is om het voortgezet reken-wiskundeonderwijs goed te kunnen volgen.

In die zin laten we ons in dit programma leiden door de doelstellingen zoals die zijn geformuleerd of afgeleid kunnen worden uit onder andere het Referentiekader taal en rekenen (2009) en het KNAW-rapport (2009). In de verschillende domeinen worden praktische handvatten aangereikt betreffende het signaleren en diagnosticeren van rekenproblemen en de wijze waarop bij (specifieke) uitval hulp geboden kan worden. Daar waar mogelijk zal per subdomein (zie paragraaf hierna) worden ingegaan op verschillende soorten tekorten in kennis en/of vaardigheden, die een rol kunnen spelen bij het falen van een leerling. Zo kan er bijvoorbeeld sprake zijn van:

- ontbrekend getalinzicht,
- onvoldoende kennis van de operatoren,
- onvoldoende (ondersteunende) automatisering,
- incorrecte oplossingsprocedures,
- tekortschietend inzicht,
- systematische rekenfouten
- metacognitieve tekorten.

De diagnostiek die in de verschillende onderdelen van het programma wordt uitgewerkt is, daar waar mogelijk, gericht op het traceren van die specifieke tekorten.

In daarop aansluitende handelingsadviezen worden algemene en specifieke aanbevelingen, suggesties en uitwerkingen geboden, waarmee rekenzwakke leerlingen gericht geholpen kunnen worden.

## Rekenleerstofdomeinen

De domeinen die in dit programma worden behandeld, zijn:

- basisvaardigheden (1),
- cijferen (2),
- (breuken), verhoudingen en procenten (3),
- breuken en kommagetallen (4),
- meten en meetkunde (5),
- algebra (6)
- statistiek en kansberekening (7).

De domeinen, die steeds onderverdeeld zijn in subdomeinen, worden op taakniveau geanalyseerd.

Ter illustratie een voorbeeld van de indeling van een domein in subdomeinen.

Het domein 'basisvaardigheden' bijvoorbeeld is opgedeeld in negen subdomeinen:

- (1.1) gevarieerd voor- en achteruit tellen met eenheden, vijftallen en machten van tien, en deze vaardigheid toepassen;
- (1.2) optel tafels tot tien en de daarvan afgeleide aftrekt afels uit het hoofd kennen, en deze vaardigheid toepassen;
- (1.3) tafels van vermenigvuldiging tot tien en de verwante delingstafels uit het hoofd kennen, en deze vaardigheid toepassen;
- (1.4) elementaire hoofdrekenopgaven vlot en inzichtelijk toepassen;
- (1.5) schattend rekenen en afronden;
- (1.6) toepassing van schattend rekenen toepassen;
- (1.7) de zakrekenmachine doelmatig gebruiken;
- (1.8) inzicht in het positie systeem waar-

op de decimale schrijfwijze van getallen berust;

- (1.9) kennis van negatieve getallen.

Voor ieder subdomein kunnen de problemen groepsgewijs en schriftelijk gesignaleerd (geïnteriseerd) worden. Op deze manier kunnen leerlingen met vergelijkbare rekenproblemen groepsgewijs aan de slag.

Individuele leerlingen, die zodanig uitvallen dat ze het reguliere onderwijs niet goed kunnen volgen, kunnen verder gediagnostiseerd worden om preciezer zicht te krijgen op de problemen. Uiteraard worden, ten behoeve van de hulp die geboden kan worden bij het oplossen van problemen, handelingssuggesties aangereikt.

Het diagnostisch proces wordt per subdomein zodanig beschreven dat duidelijk wordt over welke kennis de leerling moet beschikken om de gevraagde bewerkingen op te kunnen lossen. Als intensieve hulp niet het gewenste effect heeft dan kan de leerling doorverwezen worden voor verder diagnostisch onderzoek (zie: Van Luit, Bloemert, Ganzinga, & Mönch, 2014)

## Literatuur

- Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: KNAW.
- Meijerink, H.P., Letschert, J.F., Rijlaarsdam, G.C.W., Van den Bergh, H.H., & Van Streun, A. (2009). *Referentiekader Taal en Rekenen. De referentieniveaus*. Enschede: SLO.
- Noteboom, A., Van Os, S., & Spek, W. (2011). *Concretisering referentieniveaus rekenen 1F/1S*. Enschede: SLO.
- Ruijsenaars, A. J. J. M., Van Luit, J. E. H., & Van Lieshout, E. C. D. M. (2014). *Rekenproblemen en dyscalculie. Theorie, onderzoek, diagnostiek en behandeling* (4<sup>de</sup> druk). Rotterdam: Lemniscaat.
- Tieso, C.L. (2002). *The effects of grouping and curricular practices on intermediate students' mathematics achievement*. Storrs, CT: National Research Center on the Gifted and Talented.
- Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1987). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (1). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 6, 1, 7-28.
- Van de Weijer-Bergsma, E., & Prast, E. J. (2013). Gedifferentieerd primair rekenonderwijs volgens experts: De resultaten uit een Delphi-onderzoek. *Orthopedagogiek: Onderzoek en Praktijk*, 52, 336-349.
- Van Groenestijn, M., Van Dijken, G., & Janson, D. (2012a). *Protocol ernstige rekenwiskunde-problemen en dyscalculie VO*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Van Groenestijn, M., Van Dijken, G., & Janson, D. (2012b). *Protocol ernstige rekenwiskunde-problemen en dyscalculie MBO*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Van Luit, J. E. H. (2010). *Dyscalculie, een stoornis die telt*. Doetinchem: Graviant (oratie).
- Van Luit, J.E.H., Bloemert, J., Ganzinga, E.G., & Mönch, M.E. (2014). *Protocol dyscalculie: Diagnostiek voor gedragsdeskundigen (2e herziene druk)*. Doetinchem: Graviant.

